ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ THU GIANG

VỀ BẤT ĐẲNG THỨC OSTROWSKI VÀ TRAPEZOID

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ THU GIANG

VỀ BẤT ĐẲNG THỨC OSTROWSKI VÀ TRAPEZOID

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Trần Xuân Quý

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Bảng ký hiệu viết tắt

$\bigvee_a^b(f)$	biến phân toàn phần của hàm số f trên đoạn $[a,b]$;
$\sum_{i=1}^n a_i$	$:= a_1 + a_2 + \cdots + a_n$;
$\max\{a,b\}$	phần tử lớn nhất trong tập hai phần tử a,b;
$\|f\|_s$	$:= \left(\int_a^b \mid f(t) \mid^s dt\right)^{\frac{1}{s}}$ với $s \in [1;\infty)$, *hay chuẩn cấp* s *của hàm số* f *trên đoạn* $[a,b]$*;*
$\|f\|_\infty$	$:= \sup_{t\in(a;b)} \mid f(t) \mid$;
$\sigma(f,\xi,I_n)$	$:=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)h_i$, *(tổng Riemann của hàm* f *trên* $[a,b]$*)*;
$\|f\|_{[u,v],s}$	chuẩn cấp s của hàm số f trên đoạn $[u,v]$.

Mở đầu

Chúng ta đều biết rằng môn Toán được coi là môn "thể thao trí tuệ" giúp người học có nhiều cơ hội rèn luyện, phát triển tư duy cũng như bồi dưỡng năng lực thẩm mỹ khi nghiên cứu nét đẹp của những công thức giải toán độc đáo và mới mẻ.

Trong nhiều năm qua, hầu hết các kỳ thi quan trọng như thi học sinh giỏi Toán cấp tỉnh, cấp Quốc gia, Quốc tế,.... các bài toán liên quan đến bất đẳng thức chiếm một vị trí đáng kể. Đối với lớp bất đẳng thức rời rạc thì đã được khai thác khá triệt để ở chương trinh phổ thông, thậm chí cả cấp THCS. Vì nó là bài toán so sánh, nên trong các kỳ thi học sinh giỏi thường xuất hiện bài toán về cực trị bất đẳng thức. Tuy vậy, một lượng lớn bài toán về bất đẳng thức hàm lại ít được khai thác ở bậc trung học, dạng toán này thường chỉ xuất hiện dạng đơn giản ở bài toán bất phương trình, hoặc xuất hiện bài khó ở các kỳ thi chọn học sinh giỏi cấp Quốc gia, chọn đổi tuyển Quốc tế. Vì lý do đó mà tôi lựa chọn đề tài về bất đẳng thức hàm làm chủ đề cho luận văn thạc sĩ của mình, cụ thể với đề tài: "Về bất đẳng thức Ostrowski và Trapezoid'. Đây là loại bất đẳng thức trung bình tích phân.

Năm 1938, Ostrowski đã chứng minh được một ước lượng về trung bình tích phân như sau

Định lý 0.1. *Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) với $|f'(t)| \leqslant M < \infty$ với mọi $t \in (a, b)$. Khi đó, với bất kỳ $x \in [a, b]$, ta có*

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(t)dt \right| \leqslant \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{x - \dfrac{a+b}{2}}{b-a} \right)^2 \right] M(b-a). \tag{0.1}$$

Hằng số $\dfrac{1}{4}$ là đánh giá tốt nhất, không thể thay thế bằng số bé hơn.

Bất đẳng thức (0.1) được coi là bất đẳng thức Ostrowski. Các kế quả tổng quát và liên quan đã được trình bày trong Chương 2 và 3. Một ước lượng khác cho trung bình tích phân được cho bởi quy tắc trapezoid (hay quy tắc hình thang) như sau

Định lý 0.2 (Cerone và Dragomir [7]). *Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) với $|f'(t)| \leqslant M < \infty$ với mọi $t \in (a, b)$. Khi đó, với bất* *kỳ* $x \in [a,b]$*, ta có*

$$\left|\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)dt\right| \leqslant \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2\right] M(b-a), \tag{0.2}$$

với mọi $x \in [a,b]$*. Hằng số* $\frac{1}{4}$ *là đánh giá tốt nhất.*

Năm 1946, Pompeiu đã đưa ra một dạng khác của định lý giá trị trung bình Lagrange, kết quả này được biết đến như định lý giá trị trung bình Pompeiu, kết quả này được phát biểu trong định lý dưới đây:

Định lý 0.3. *Với mọi hàm thực* f *khả vi trên* $[a,b]$ *khoảng này không chứa* 0 *và với mọi cặp* $x_1 \neq x_2$ *trong* $[a,b]$*, tồn tại* ξ *giữa* x_1 *và* x_2 *sao cho*

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

Định lý giá trị trung bình Pompeiu được vận dụng để đưa ra các cách xấp xỉ khác nhau của trung bình tích phân, chẳng hạn như kết quả dưới đây.

Định lý 0.4 (Dragomir, 2005 [9])**.** *Giả sử hàm* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *liên tục trên* $[a,b]$ *và khả vi trên* (a,b) *với* $[a,b]$ *không chứa* 0*. Khi đó với bất kỳ* $x \in [a,b]$*, ta có bất đẳng thức sau*

$$\left|\frac{a+b}{2}.\frac{f(x)}{2} - \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)dt\right| \leqslant \frac{b-a}{|x|}\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2\right] \|f - \ell f'\|_\infty,$$

trong đó $\ell(t) = t,\ t \in [a,b]$*. Hằng số* $\frac{1}{4}$ *là đánh giá tốt nhất.*

Nội dung của luận văn được trình bày trong ba chương, cụ thể:

Chương 1. Trình bày sơ lược về hàm số, biến phân của hàm số, bất đẳng thức Hölder. Bất đẳng thức Ostrowski và trapezoid.

Chương 2. Trình bày về bất đẳng thức kiểu Ostrowski, trapezoid đối với các lớp hàm có biến phân bị chặn, hàm đơn điệu, hàm liên tục tuyệt đối. Làm chặt bất đẳng thức Ostrowski đối với hàm Chebyshev. Nội dung chương này trình bày từ tài liệu [2].

Chương 3. Trình bày về bất đẳng thức kiểu Ostrowski và trapezoid liên hệ với định lý giá trị trung bình Pompeiu với trọng số mũ phức. Một bất đẳng thức kiểu Ostrowski và trapezoid mới và một số kết quả làm chặt các bất đẳng thức kiểu Ostrowski và trapezoid. Nội dung chương này trình bày lại một số kết quả trong bài báo "Ostrowski and Trapezoid type inequalities related to pompeiu's mean value theorem with complex exponential weight" của Cerone P., Dragomir S. S., Kikianty E. công bố năm 2017 (xem [3]).

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, em luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và động viên của các thầy cô trong Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo, Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Khoa học, ĐH Thái Nguyên. Với bản luận văn này, em mong muốn được góp một phần nhỏ công sức của mình vào việc gìn giữ và phát huy vẻ đẹp, sự hấp dẫn cho những định lý toán học vốn dĩ đã rất đẹp. Đây cũng là một cơ hội cho em gửi lời tri ân tới tập thể các thầy cô giảng viên của trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên nói chung và Khoa Toán – Tin nói riêng, đã truyền thụ cho em nhiều kiến thức khoa học quý báu trong thời gian em được là học viên của trường.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu trường Phổ thông Dân tộc Nội trú tỉnh Quảng Ninh cùng toàn thể các anh chị em đồng nghiệp đã tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong thời gian đi học Cao học; cảm ơn các anh chị em học viên lớp Cao học Toán K11 và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Đặc biệt em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo chủ nhiệm lớp Toán K11, TS. Trần Xuân Quý đã luôn quan tâm ân cần chỉ bảo, động viên khích lệ, giúp đỡ tận tình và góp ý sâu sắc cho em trong suốt quá trình học tập cũng như thực hiện đề tài. Chặng đường vừa qua sẽ là những kỉ niệm đáng nhớ và đầy ý nghĩa đối với các anh chị em học viên lớp K11 nói chung và với bản thân em nói riêng. Dấu ấn ấy hiển nhiên không thể thiếu sự hỗ trợ, sẻ chia đầy yêu thương của cha mẹ hai bên và các anh chị em con cháu trong gia đình. Xin chân thành cảm ơn tất cả những người thân yêu đã giúp đỡ, đồng hành cùng em trên chặng đường vừa qua. Một lần nữa, em xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 15 tháng 5 năm 2019

Học viên

Đỗ Thị Thu Giang

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi, trình bày một số kiến thức khái niệm và tính chất về hàm số liên tục tuyệt đối, biến phân và biến phân toàn phần của hàm số. Bất đẳng thức Hölder dạng đại số và dạng giải tích, Bất đẳng thức Ostrowski và traped. Các kết quả này được sử dụng cho các chứng minh ở Chương 2 và Chương 3.

1.1. Hàm số, biến phân và biến phân toàn phần

Định nghĩa 1.1. (a) Hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ được gọi là liên tục tuyệt đối trên $[a, b]$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số dương δ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)| < \varepsilon,$$

với mọi họ hữu hạn các khoảng rời nhau $\{[x_i, y_i] : \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ của $[a, b]$ với $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < \delta$.

(b) Hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ được gọi là có biến phân bị chặn trên $[a, b]$ khi và chỉ khi tồn tại hằng số $M > 0$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M,$$

với mọi phân hoạch $\mathbb{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ của $[a, b]$.

(c) Nếu hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ có biến phân bị chặn trên $[a, b]$, thì biến phân toàn phần của f trên $[a, b]$ được xác định như sau

$$\bigvee_a^b(f) = \sup_{\mathbb{P}=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\} \ \text{phân hoạch của}[a,b]} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1}) \ | \right\}.$$

Nhận xét 1.1. *Một hàm liên tục tuyệt đối trên $[a, b]$ thì liên tục đều và có biến phân bị chặn trên $[a, b]$.*

Ví dụ 1.1. Nếu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm đơn điệu tăng thì với mọi phân hoạch $\mathbb{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ của $[a,b]$ ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) - f(x_{i-1})\} \\ &= f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Vì vậy, hàm f có biến phân bị chặn và $\bigvee_a^b (f) = f(b) - f(a)$.

Ví dụ 1.2. Nếu hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) với $\sup\limits_{a<x<b} |f'(x)| \geq M$, thì với mọi phân hoạch $\mathbb{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ của $[a,b]$ và theo định lý giá trị trung bình ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} |f'(t_i)[x_i - x_{i-1}]| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} M[x_i - x_{i-1}] = M(b-a).\end{aligned}$$

Do đó hàm f có biến phân bị chặn và $\bigvee_a^b (f) \leq M(b-a)$.

Định lý 1.1. *(a) Nếu $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ là các hàm có biến phân bị chặn và $c, d \in \mathbb{R}$, thì $cf + dg$ có biến phân bị chặn và có bất đẳng thức sau*

$$\bigvee_a^b (cf + dg) \leq |c| \bigvee_a^b (f) + |d| \bigvee_a^b (g).$$

(b) Nếu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ có biến phân bị chặn trên $[a,b]$ và $[c,d] \subset [a,b]$, thì f có biến phân bị chặn trên $[c,d]$ và

$$\bigvee_c^d (f) \leq \bigvee_a^b (f).$$

(c) Nếu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ có biến phân bị chặn và $c \in (a,b)$, thì

$$\bigvee_a^b (f) = \bigvee_a^c (f) + \bigvee_c^b (f).$$

(d) Nếu hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ có biến phân bị chặn thì hàm $V(x) = \bigvee_a^x (f)$ và $V(x) - f(x)$ đơn điệu tăng trên $[a,b]$.

(e) Hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ có biến phân bị chặn khi và chỉ khi nó là hiệu của hai hàm tăng.

1.2. Bất đẳng thức Hölder

Bất đẳng thức Hölder tồn tại ở nhiều phiên bản, tuy nhiên chúng tôi chỉ trình bày ở dạng đại số và giải tích cơ bản, mà chúng phù hợp với chương trình phổ thông.

Từ bất đẳng thức AM–GM suy rộng ta có

$$x^a y^b \leqslant \frac{a}{a+b} x^{a+b} + \frac{b}{a+b} y^{a+b} \tag{1.1}$$

với mọi $x, y \geqslant 0,\ a, b > 0$. Nếu đặt $u = x^a,\ v = y^b,\ p = (a+b)/a$ và $q = (a+b)/b$, rõ ràng $p > 1$ và ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow uv \leqslant \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q. \tag{1.2}$$

Bất đẳng thức này được gọi là bất đẳng thức Young. Kết quả dưới đây được gọi là bất đẳng thức Hölder.

Định lý 1.2 (Bất đẳng thức Hölder)**.** *Cho $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ là hai bộ n số thực dương và $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.3}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_i^p = k b_i^q$ với mọi $i \in \{1, 2, , \ldots, n\}$.

Kết quả tiếp theo là bất đẳng thức Hölder ở dạng giải tích, chúng tôi chỉ trình bày kết quả mà không chứng minh.

Định lý 1.3 (Bất đẳng thức Hölder dạng giải tích)**.** *Giả sử (p, q) là cặp số mũ liên hợp, tức là thỏa mãn điều kiện $p, q > 1$ với $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, f và g là hai hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$, khi đó*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.4}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tồn tại hai số thực A và B không đồng thời bằng không sao cho

$$A\,|f(x)|^p = B\,|g(x)|^q \quad \forall x \in [a, b].$$